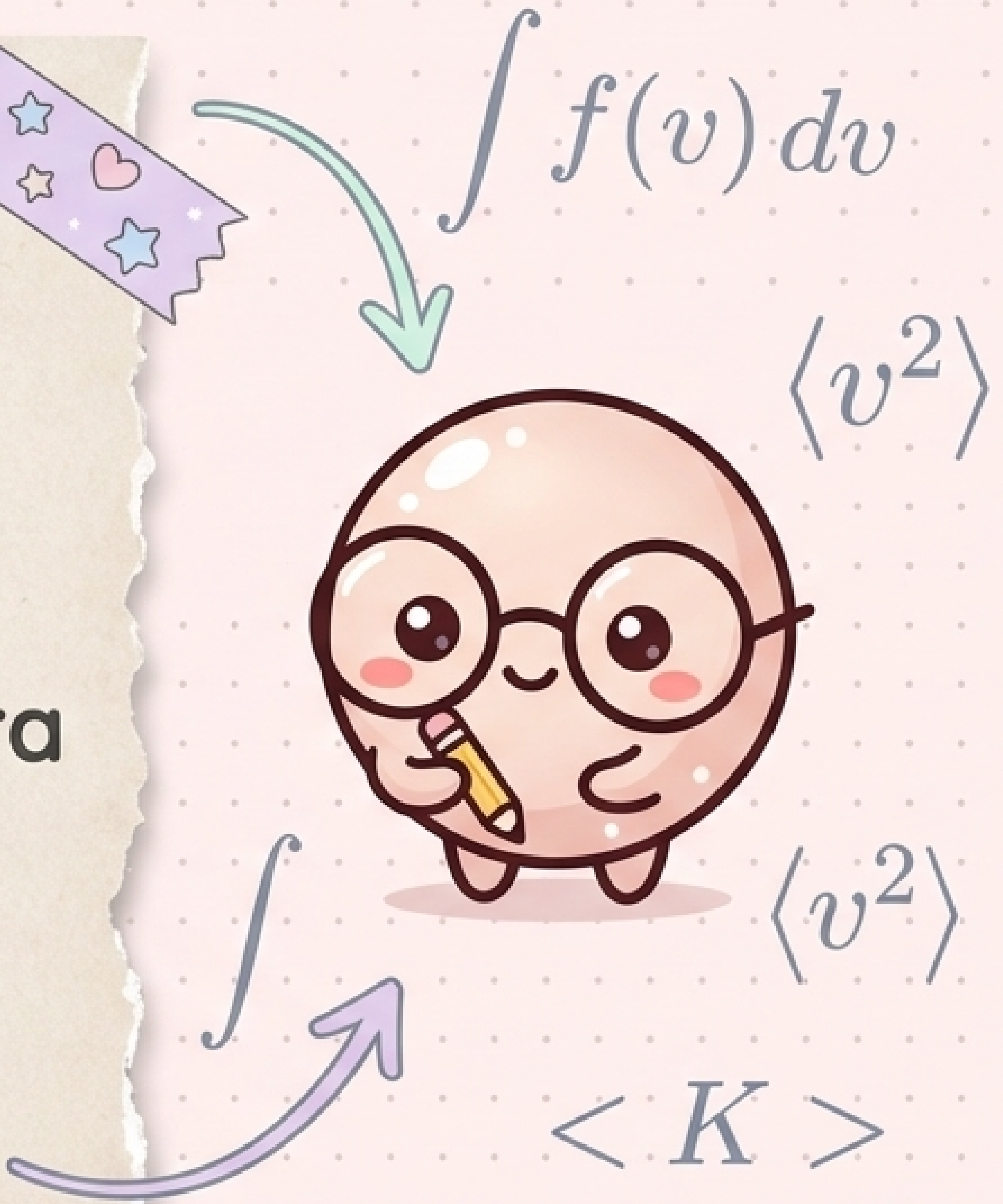
Teoría Cinética y Probabilidad

De las Matemáticas a la Temperatura (Apuntes Nivel Universitario)

Una guía visual paso a paso para derivar $< K > = \frac{3}{2} k_B T$ sin estrés.



El Mapa de Estudio de Hoy

1. La Caja de Herramientas

Repaso de probabilidad, variables aleatorias y valor esperado.

2. El Modelo Físico

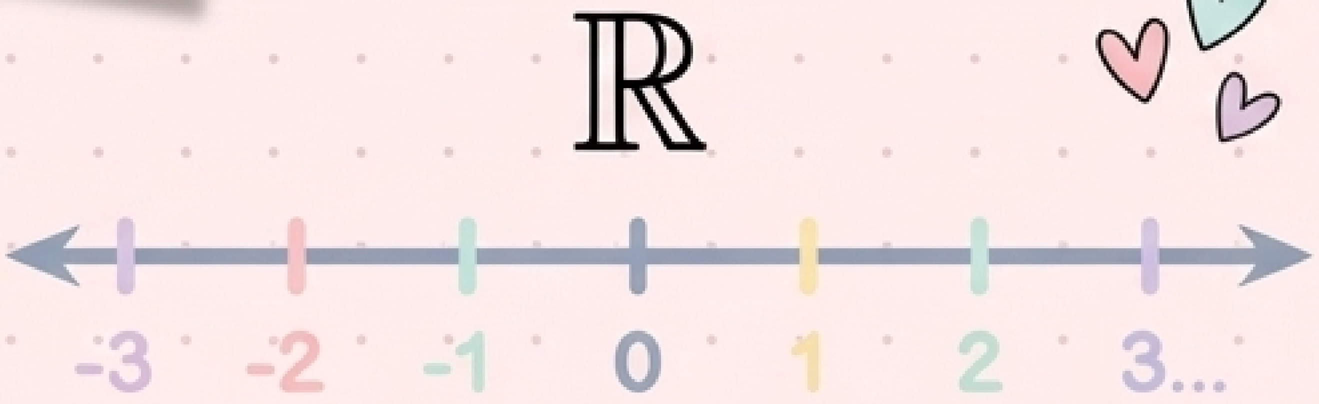
Conoce a nuestras partículas de gas y sus velocidades.

3. El Gran Descubrimiento

Cómo la probabilidad crea la presión y la temperatura

Espacio Muestral y Variables Aleatorias

Variable Aleatoria (X):
Es un mapeo.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$



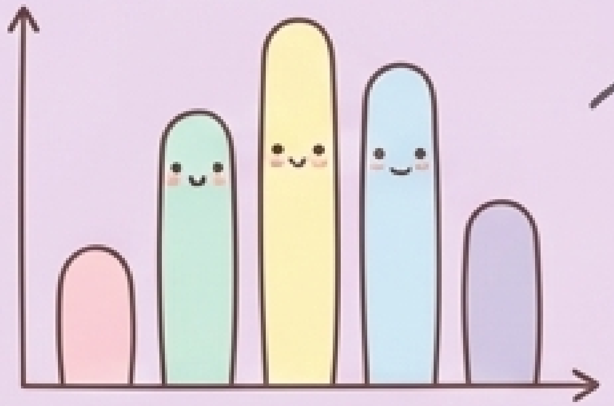
Espacio Muestral (Ω): Conjunto de salidas posibles de un experimento. Los subconjuntos son los eventos. (Ej: Que en el primer lanzamiento salga Cara).

Asignamos números reales a los eventos abstractos para poder calcularlos.
X es una muestra dentro de Ω.

Distribuciones de Probabilidades

¿Cómo se comporta nuestra variable aleatoria?

Discreta



Toma valores contables finitos finitos o infinitos.

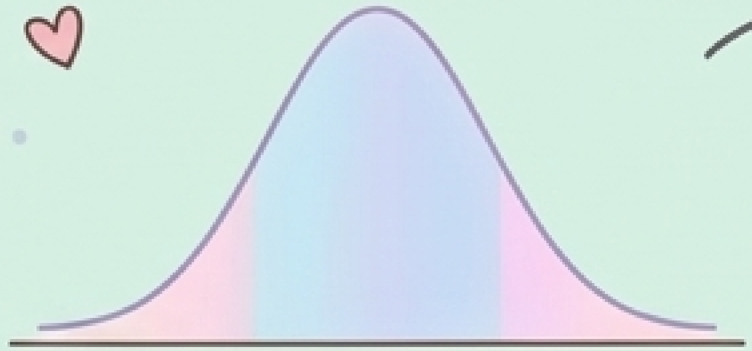
Función de Masa de Probabilidad (PMF):

$$P(X=x) = f(x)$$

Condiciones:

1) $f(x) \geq 0$
2) $\sum f(x) = 1$

Continua



Toma valores dentro de un intervalo de $\mathbb{R}$.

Función de Densidad de Probabilidad (PDF):

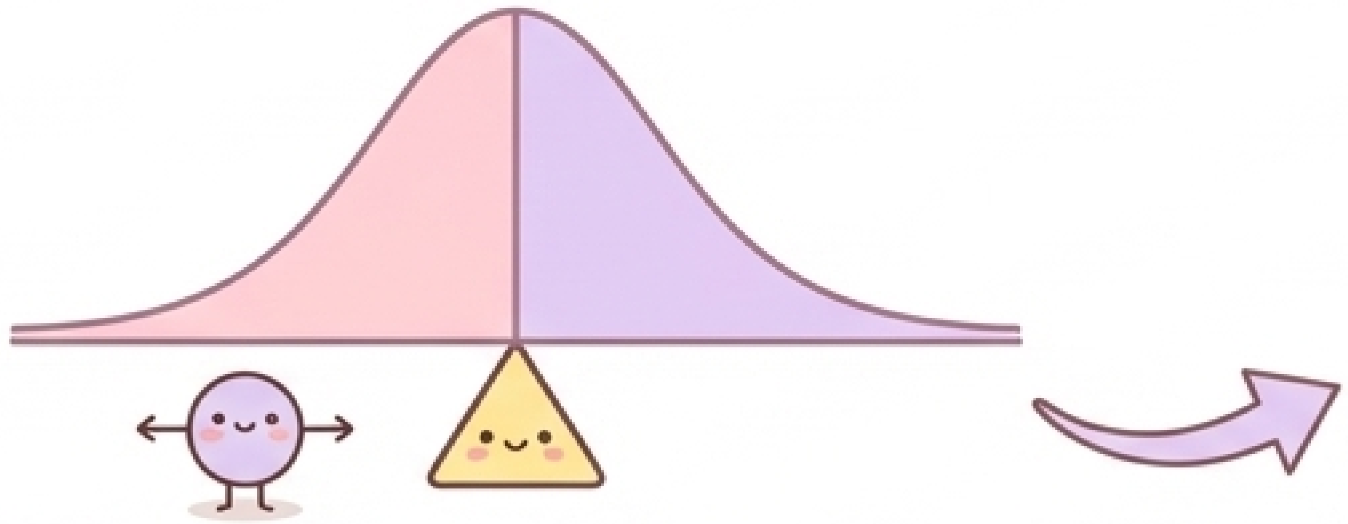
$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b P(x)dx$$

Condiciones:

1) $P(x) \geq 0, \forall x$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1$

El Corazón de los Datos: Esperanza y Varianza

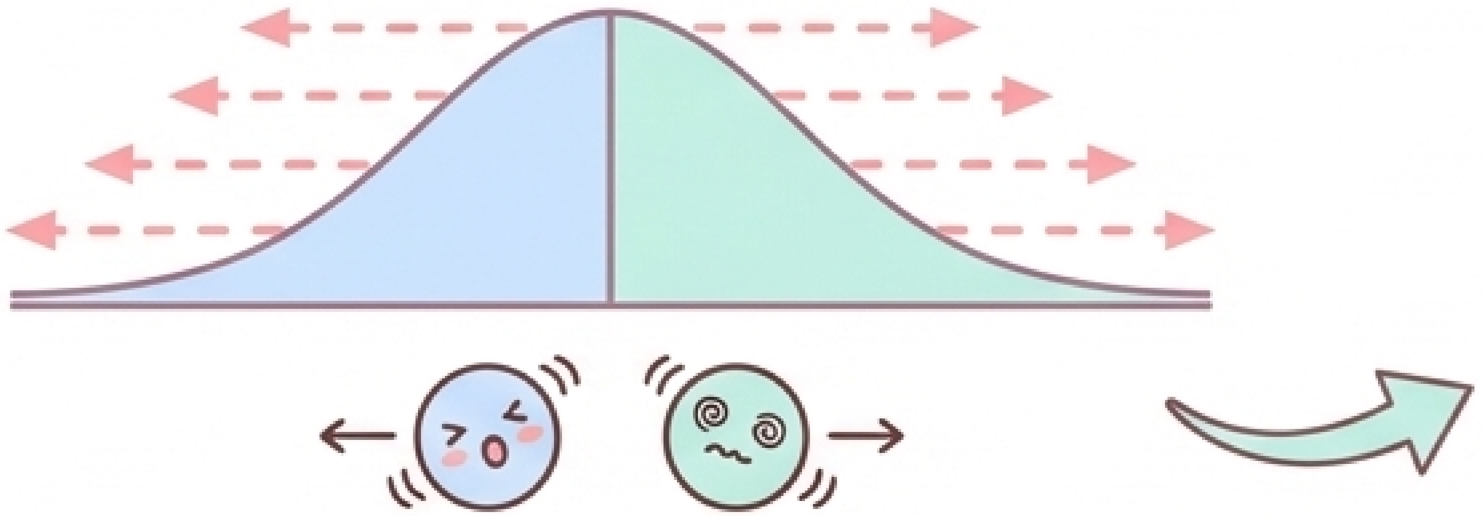
Valor Medio / Esperanza



Representa el centro de equilibrio de nuestra distribución.

$$E\{x\} = \langle x \rangle = \int P(x)x\,dx$$

Varianza / Desviación Estándar

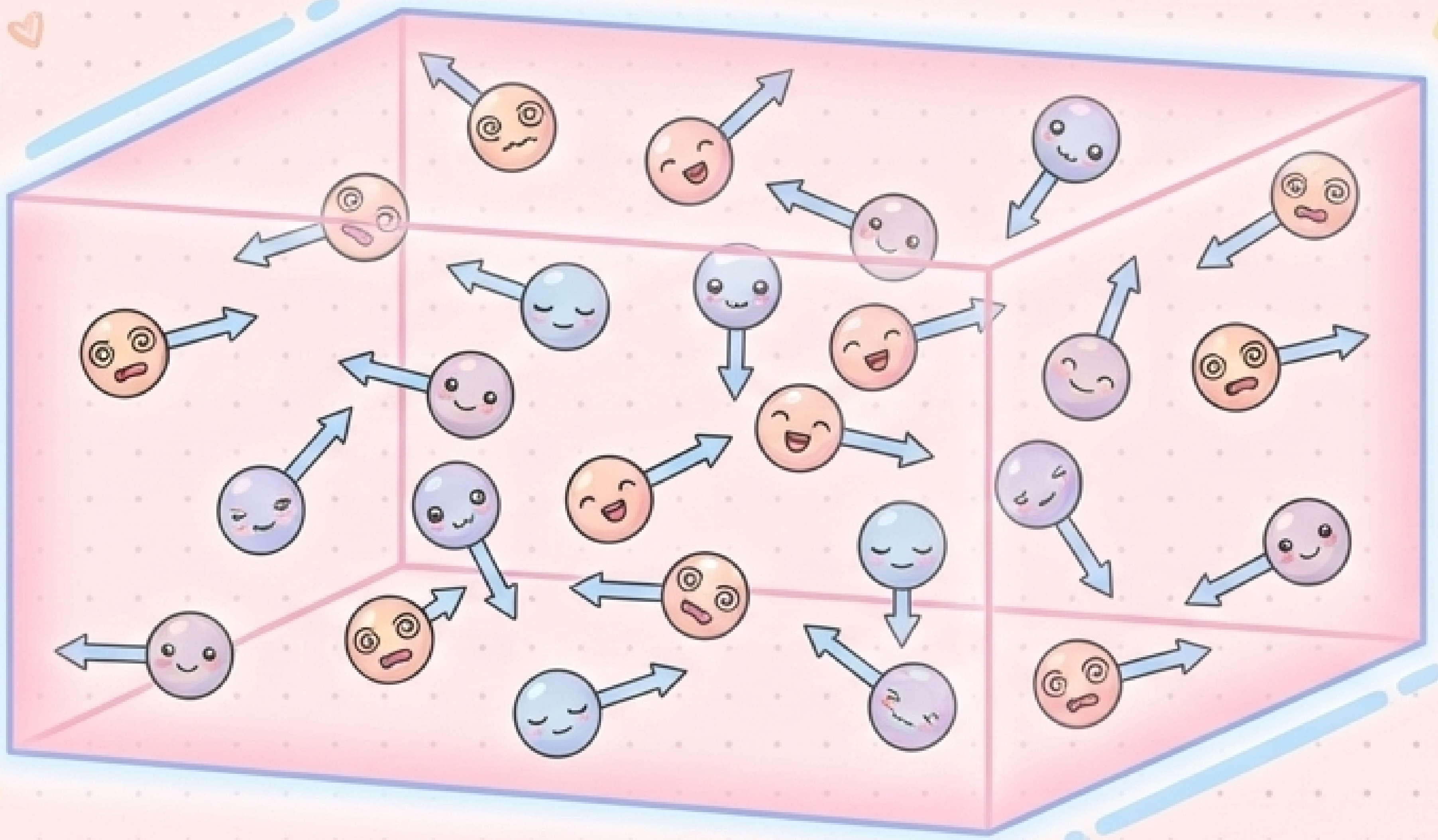


Mide qué tan dispersos están los datos alrededor del valor medio.

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int P(x)x^2\,dx$$

Entrando al Mundo Físico: Conoce a las Partículas



Tenemos un volumen con N partículas. Cada una tiene un vector de velocidad:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z).$$

La Regla del Equilibrio: En el equilibrio, el promedio de N tiene que ser siempre el mismo en un intervalo $d\vec{v}$ de velocidad. ¡Incluso si cada partícula de forma individual cambia sus velocidades por los choques!

La Distribución de Velocidades

¿Cuántas partículas tienen una velocidad específica?

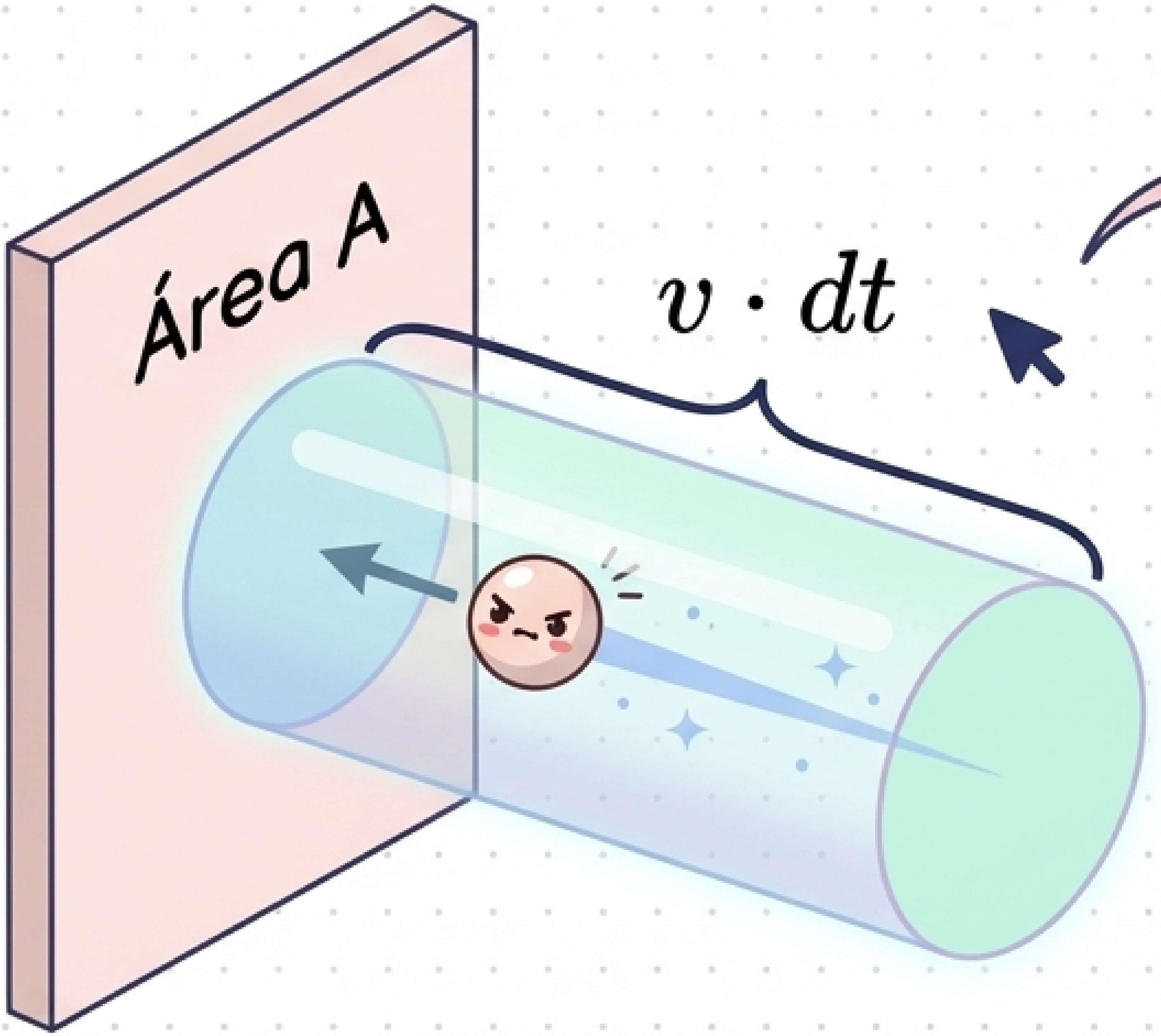
$$dN = N \cdot f(\vec{v}) \cdot d\vec{v}$$

- dN → Número de partículas en este rango.
- N → Número total de partículas.
- $f(\vec{v})$ → Función de probabilidad de las velocidades.
- $d\vec{v}$ → El intervalo de velocidad.

Como es una probabilidad continua, sabemos que: $\int f(\vec{v}) d\vec{v} = 1.$

La Coreografía de la Presión: El Choque

¿Cuántas partículas chocan contra el área A en un intervalo dt?



Step 1:
El volumen total ocupado por el paralelepípedo de Área A es: $dv = A \cdot v \cdot dt$.

Step 2:
La fracción de partículas que lograrán chocar es proporcional al volumen que ocupan.

$$\text{Fracción} = dN \frac{A \cdot v \cdot dt}{V}$$

(donde V es el volumen total de la caja)

Del Impulso a la Presión (Diagrama de Flujo)

1. Impulso (dp)

Cuando la partícula rebota, su cambio de momento es el doble.

$$dp = 2mv \cdot dN_{\text{choque}}$$

2. Fuerza (dF)

La fuerza es el impulso distribuido en el tiempo (dt).

$$dF = \frac{dp}{dt}$$

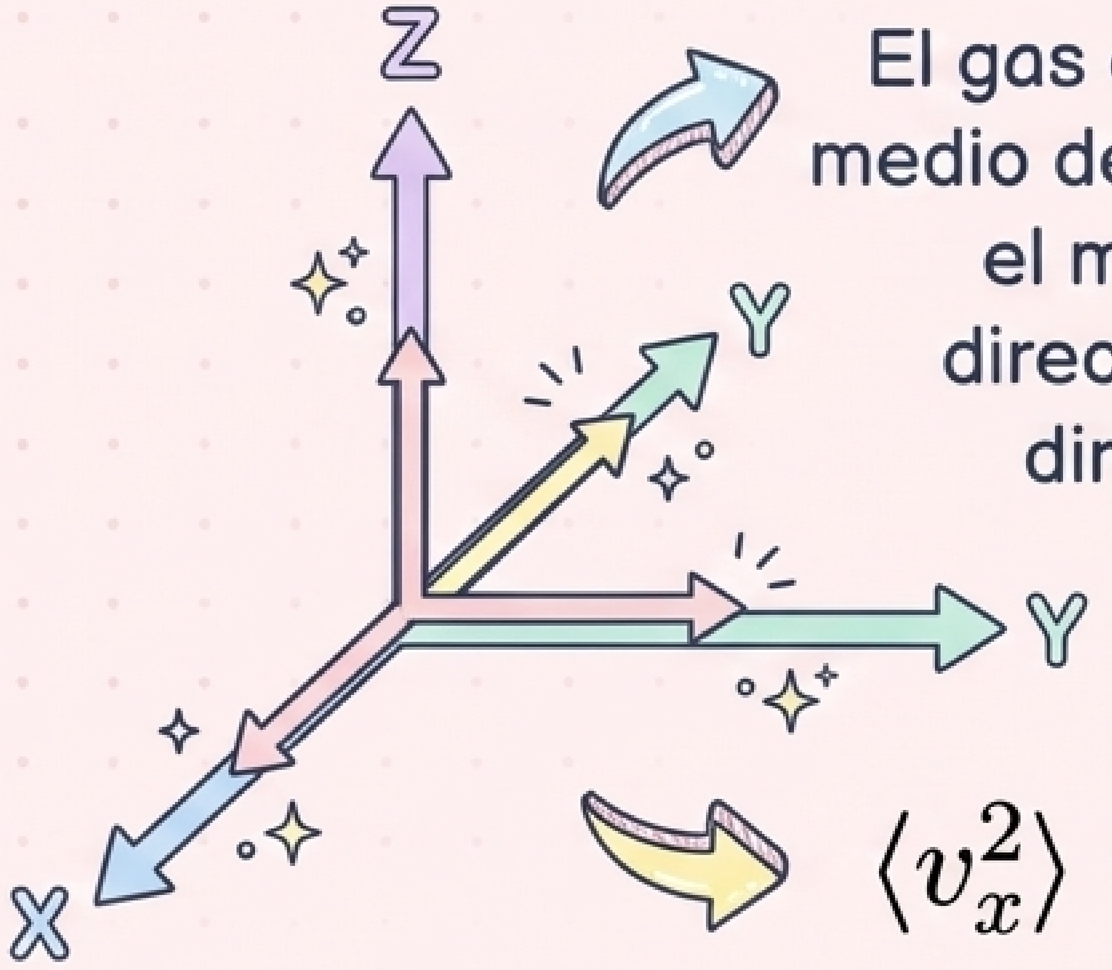
Integrando: $dF = \frac{N2mv}{V} A f(\vec{v}) d\vec{v}$

3. Presión (P)

La presión es la fuerza aplicada sobre el área (A).

$$P = \frac{1}{A} \int dF$$

Promediando el Caos en 3D



El gas es **isotrópico**: el valor medio de la velocidad debe ser el mismo en todas las direcciones. No hay una dirección preferida.

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

La Regla de Oro 3D:

Dado que $\vec{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, entonces:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

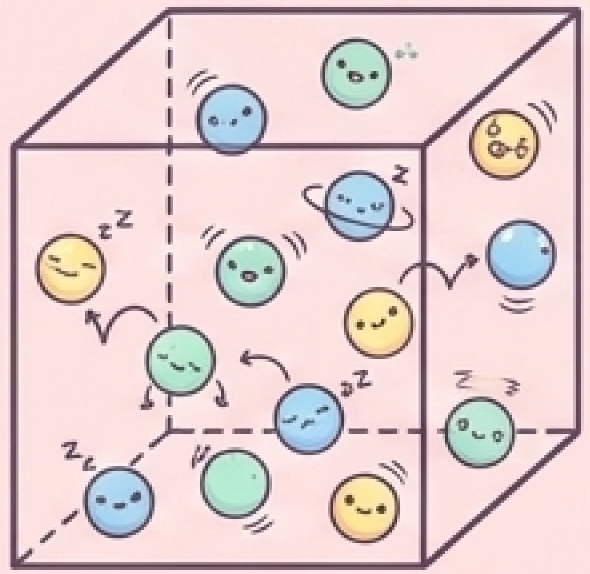
¡Resolviendo la integral con esta regla, llegamos a la Presión Cinética!

$$PV = \frac{1}{3} N m \langle v^2 \rangle$$

SÍNTESIS: El Puente Entre Dos Mundos

Termodinámica Macroscópica.
Ley de los Gases Ideales.
Lo que podemos medir a gran escala.

$$PV = Nk_BT$$



Mecánica Estadística.
Presión Cinética.
Lo que acabamos de derivar con probabilidad pura.

$$PV = \frac{1}{3}Nm\langle v^2\rangle$$

¡Ambas describen el mismo universo!
Igualemos las ecuaciones:

$$Nk_BT = \frac{1}{3}Nm\langle v^2\rangle$$

La Temperatura al Descubierto

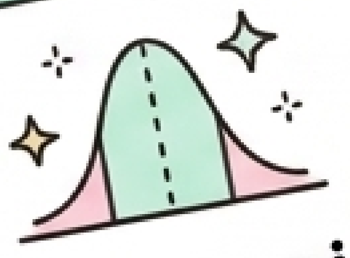
Step 1: Sabemos que la Energía Cinética de una partícula es: $K = \frac{1}{2}mv^2$.
Por lo tanto, el valor medio es $\langle K \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle$.

Step 2: Reordenando nuestra gran ecuación anterior: $Nk_BT = \frac{N \cdot 2}{3}\langle K \rangle$

$$\boxed{\langle K \rangle = \frac{3}{2}k_BT}$$

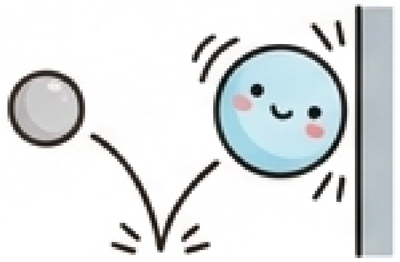
¡La temperatura no es magia! Es simplemente una medida macroscópica de la energía cinética promedio de las partículas. ¡Más movimiento microscópico = más calor!

Resumen del Apunte (Cheat Sheet)



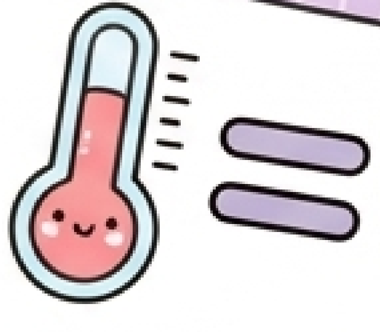
1. Las Herramientas

Usamos la función de densidad de probabilidad (PDF) para encontrar la esperanza matemática $\langle x \rangle$ del comportamiento caótico.



2. La Mecánica

Integramos los choques ($dp = 2mv$) de todas las partículas en un volumen 3D isotrópico para derivar la presión (P).



3. La Verdad

Igualamos la mecánica con los gases ideales para descubrir que $\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$.

¡Apunte completado con éxito!