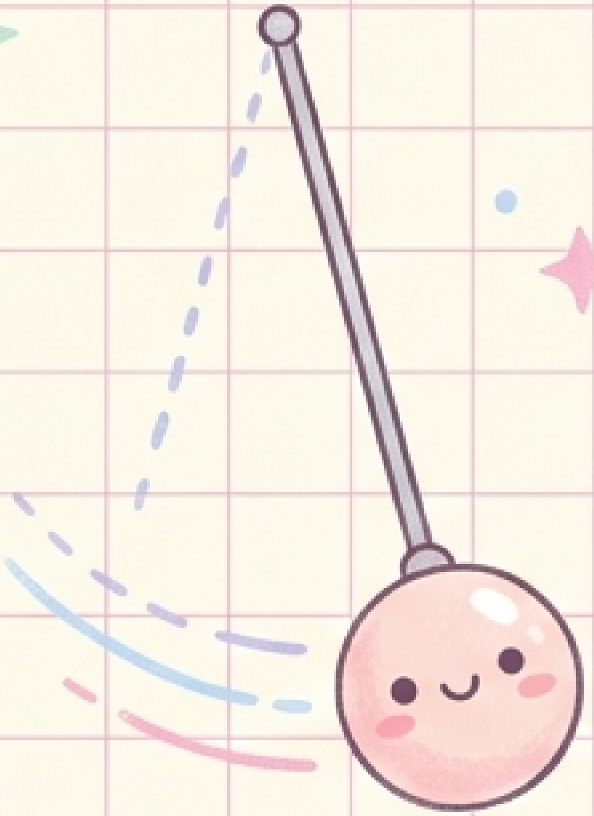


Guía Definitiva de Supervivencia: Cómo Encontrar el Lagrangeano (y no morir en el intento ♥)

Apuntes nivel universitario de Mecánica Analítica.

Todo lo que necesitas saber de derivadas y Euler-Lagrange.

Pastel Physics

T (Energía Cinética)

V (Energía Potencial)

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$$

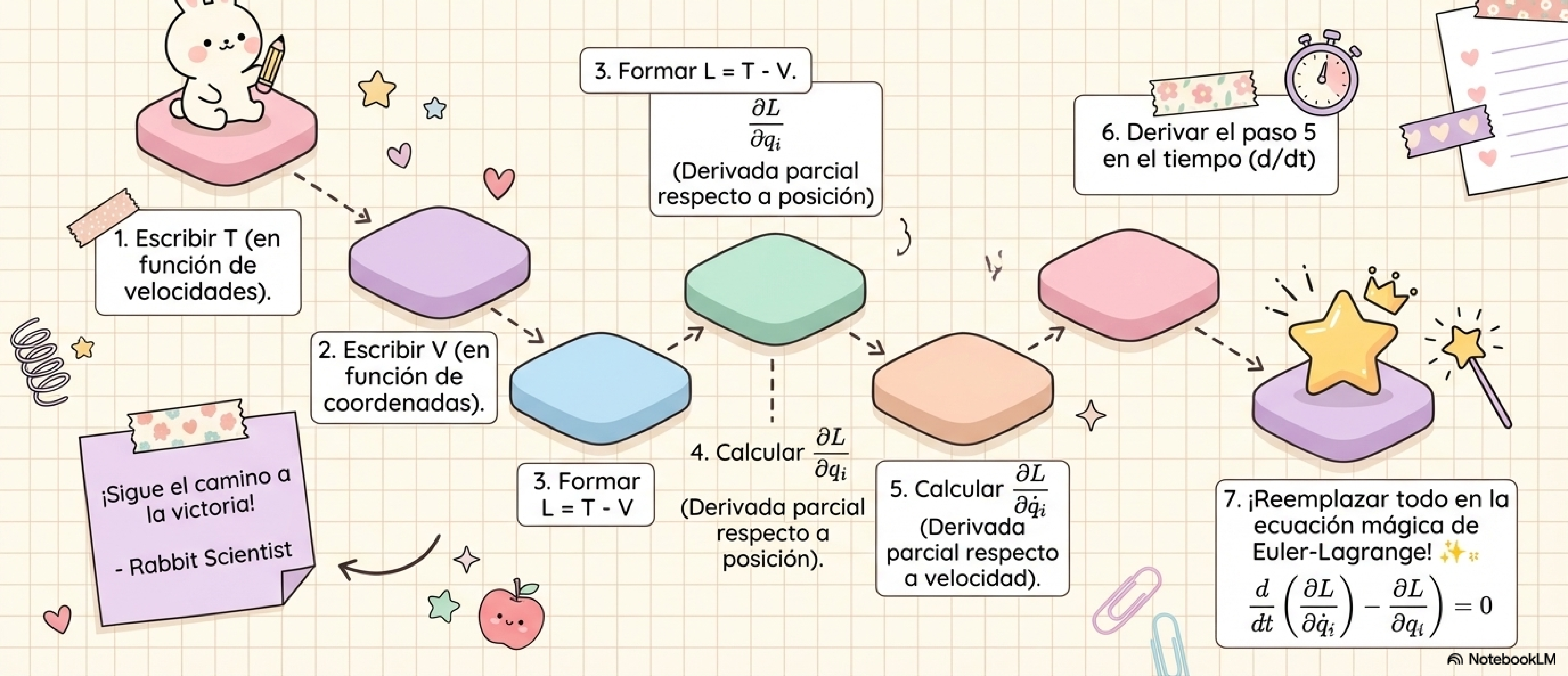
¡El lagrangeano es solo la resta entre tu energía cinética y tu energía potencial!

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Mini-Glosario

- q_i: coordenadas generalizadas (dónde está).
- $\dot{q}_i$: velocidades generalizadas (qué tan rápido se mueve).
- t: tiempo.

Qué debes saber hacer, en práctico: Hoja de Ruta Lagrangiana



Energía Cinética (T)

- Casi siempre es cuadrática.
- Ejemplo 1D: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$
- Ejemplo Polar: $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$

Energía Potencial (V)

- Depende de la posición.
- Ejemplo de gravedad:

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

Ojo 👀: En T derivarás respecto a cosas con puntito $(\dot{r}, \dot{\theta})$, y en V respecto a cosas sin puntito.

Parcial (∂)

- $\dfrac{\partial L}{\partial q}$ → Derivas respecto de q, dejando $\dot{q}$ fija (como si fuera un número cualquiera).
- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ → Derivas respecto de $\dot{q}$, dejando q fija.

Total (d/dt)

- $\dfrac{d}{dt}(\ldots)$ → Aquí sí todo puede depender del tiempo. ¡El puntito importa!

Caveat

Caveat

Caveat

Caveat

¡Entender esta diferencia es el 90% del éxito en tu examen! ✿

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

Derivada Parcial respecto a q

$$\frac{\partial L}{\partial q}$$

El término $\cancel{\frac{1}{2}m\dot{q}^2}$ no depende de q, ¡así que da 0!

Queda: $-kq$

Derivada Parcial respecto a $\dot{q}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

El término $\cancel{-\frac{1}{2}kq^2}$ no depende de $\dot{q}$, ¡así que da 0!

Queda: $m\dot{q}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

Paso 6: Aplicar $\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}) = m\ddot{q}$$

¡El puntito se duplica mágicamente! (asumiendo que m es constante).

$$-kq$$

Paso 7: Armando el Rompecabezas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$m\ddot{q} - (-kq) = 0$$

$$\boxed{m\ddot{q} + kq = 0}$$

¡Felicidades! Acabas de encontrar la ecuación del oscilador armónico.

Caja de Herramientas Matemáticas 🎀

Nota 1: Regla de la Potencia

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{d\dot{q}}(\dot{q}^2) = 2\dot{q}$$

Súper útil porque T está llena de velocidades al cuadrado.

Nota 2: Constante por Función

$$\frac{d}{dx}[c\,f(x)] = c\,f'(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2\right) = \frac{1}{2}m(2\dot{q}) = m\dot{q}$$

Las masas (m) y fracciones (1/2) se quedan afuera tranquilas.

Nota 3: Suma y Resta

$$\frac{d}{dx}(f - g) = f' - g'$$

Como $L = T - V$, derivas cada parte por separado sin estresarte.

Toolbox Nivel Pro: Cadena y Producto 🌸

Regla de la Cadena

Uso: Vital cuando las coordenadas están metidas dentro de funciones.

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

El Clásico Error:

$$\frac{d}{dt}(\sin\theta) = \cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

Caveat: *¡No olvides multiplicar por el $\dot{\theta}$ al final!*

Regla del Producto

Uso: Cuando una cantidad depende de varias cosas multiplicándose.

$$\frac{d}{dt}(fg) = \dot{f}g + f\dot{g}$$

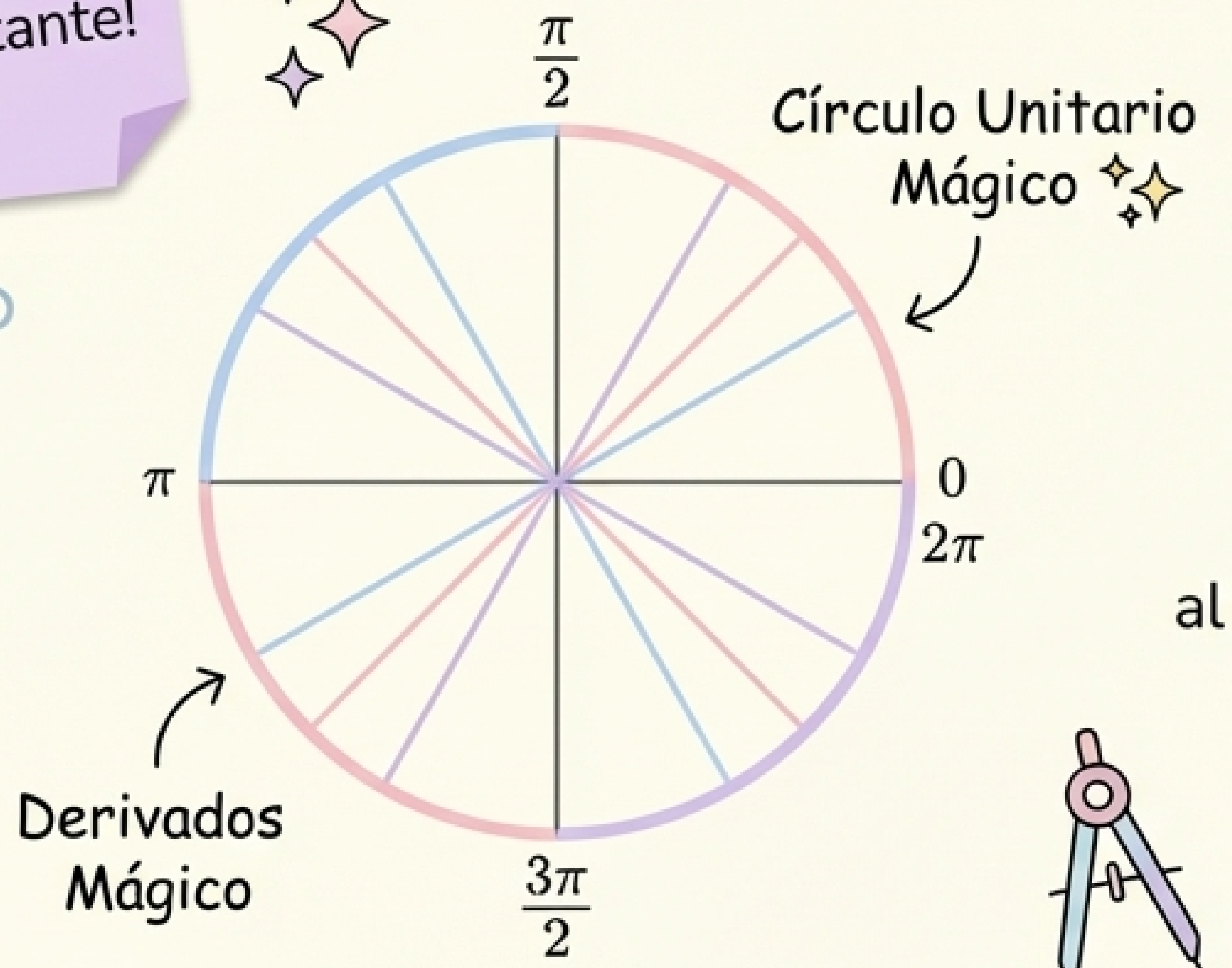
Ejemplo Estrella:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}$$

Caveat: *Aparece muchísimo en coordenadas polares.*

Secretos de Trigonometría

¡Muy Importante!



Derivadas Parciales
(Respecto al ángulo)

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta$$

Derivadas Totales (Respecto al tiempo - ¡Aplica regla de la cadena!)

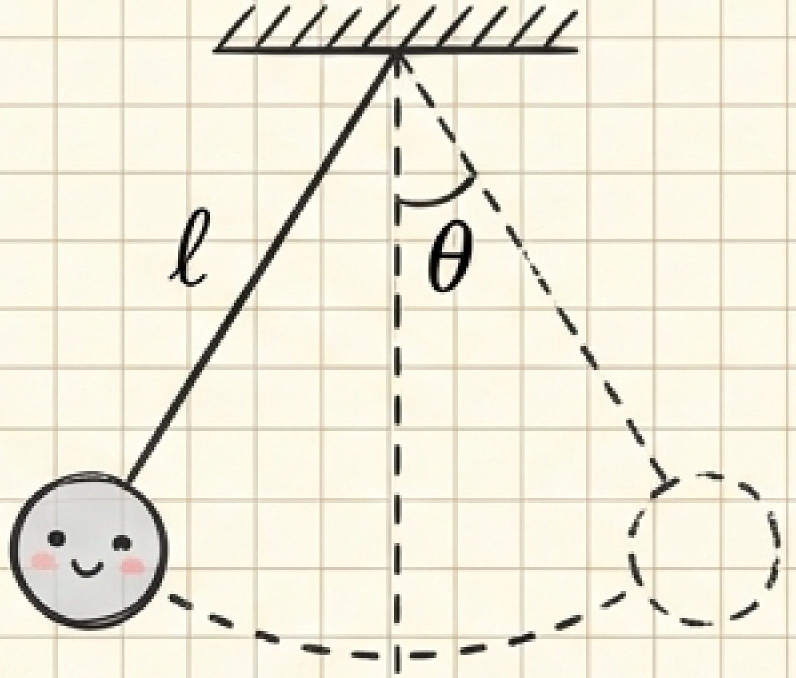
$$\frac{d}{dt}(\sin\theta) = \cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta) = -\sin\theta \cdot \dot{\theta}$$

Estas son súper típicas en péndulos, coordenadas polares y esféricas. ¡Cópalas en tu formulario!

Caso Práctico: El Péndulo Simple

El Planteamiento



$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

La Solución

Paso A (∂L / ∂θ):

Queda -mgl\sin$\theta$. *(La derivada de 1-cosθ es sinθ).*

Paso B (∂L / ∂$\ddot{\theta}$):

Queda $ml^2\dot{\theta}$.

Paso C (d/dt del Paso B):

Queda $ml^2\ddot{\theta}$.

¡La Ecuación final!

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

Práctica Nivel Diosa: La Trampa de las Polares 🚨

The Setup

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Tenemos tres variables de las que preocuparnos: $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ y r.

Zoom Box

¡Ojo con r! Está dentro de la energía cinética.

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{dV}{dr}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}$$

¡No asumas que la derivada respecto a r da cero solo porque el término está en T! Revisa siempre quién acompaña a tus velocidades.

Tu Mini-Formulario Definitivo 📝

Derivada/Regla	Para qué sirve en Lagrange	El Atajo
$\frac{\partial L}{\partial q_i}$	Ver cómo cambia L con la coordenada.	En el caso común, es -dV/dq.
$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	Ver cómo cambia L con la velocidad.	En el caso común, es $m\dot{q}$.
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$	Meter la evolución temporal.	En el caso común, es $m\ddot{q}$.
Regla de la potencia	Derivar q^2, $\dot{q}^2$, r^2, etc.	El 2 baja multiplicando.
Regla de la cadena	Funciones trigonométricas.	¡Saca siempre el $\dot{\theta}$ al final!
Regla del producto	Cuando aparecen productos como $r^2\dot{\theta}$.	Deriva el primero por el segundo intacto + viceversa.

¡Estás lista para el 10! 🎓🌸

Sobreviviste a la ecuación de Euler-Lagrange. Ya sabes cómo estructurar tu L, conoces la diferencia vital entre derivadas parciales y totales, y dominas las trampas de la regla de la cadena.

Respira hondo, usa muchos colores en tu examen para no perder ningún término, ¡y a romperla! ✨