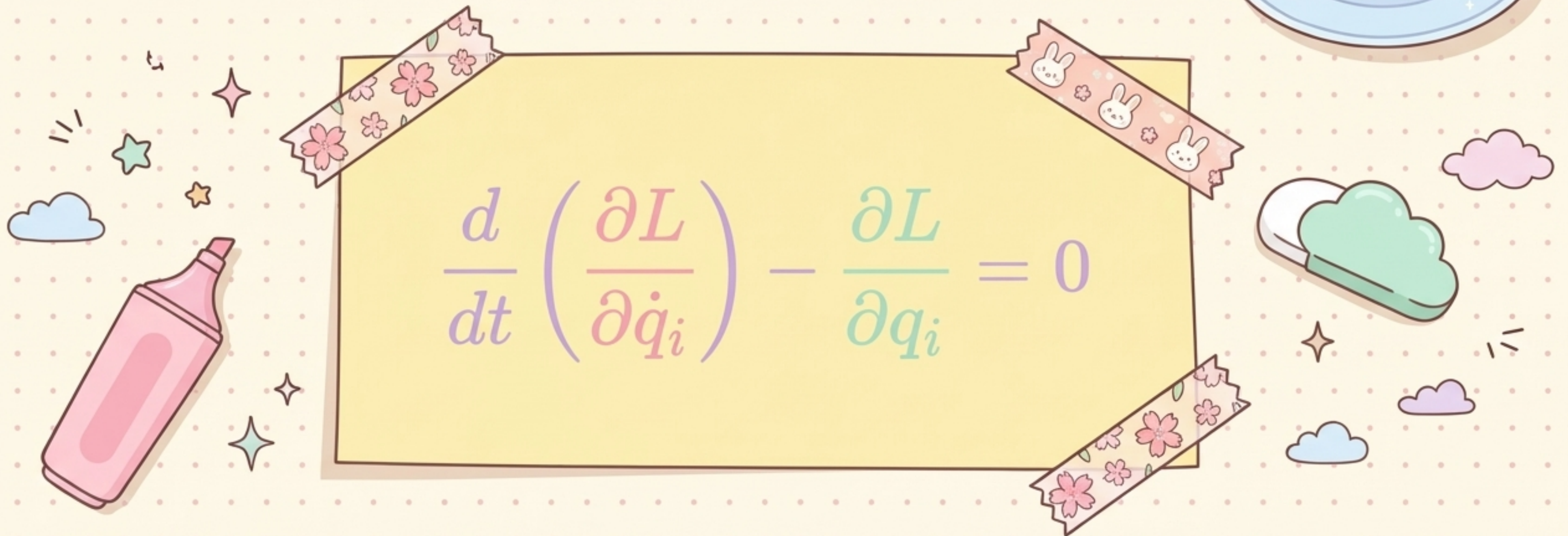


El Arte de Parametrizar

Guía nivel universitario para sobrevivir a la Mecánica Lagrangiana.



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

¿Qué significa parametrizar?

Antes decíamos solo:

$$y = f(x)$$

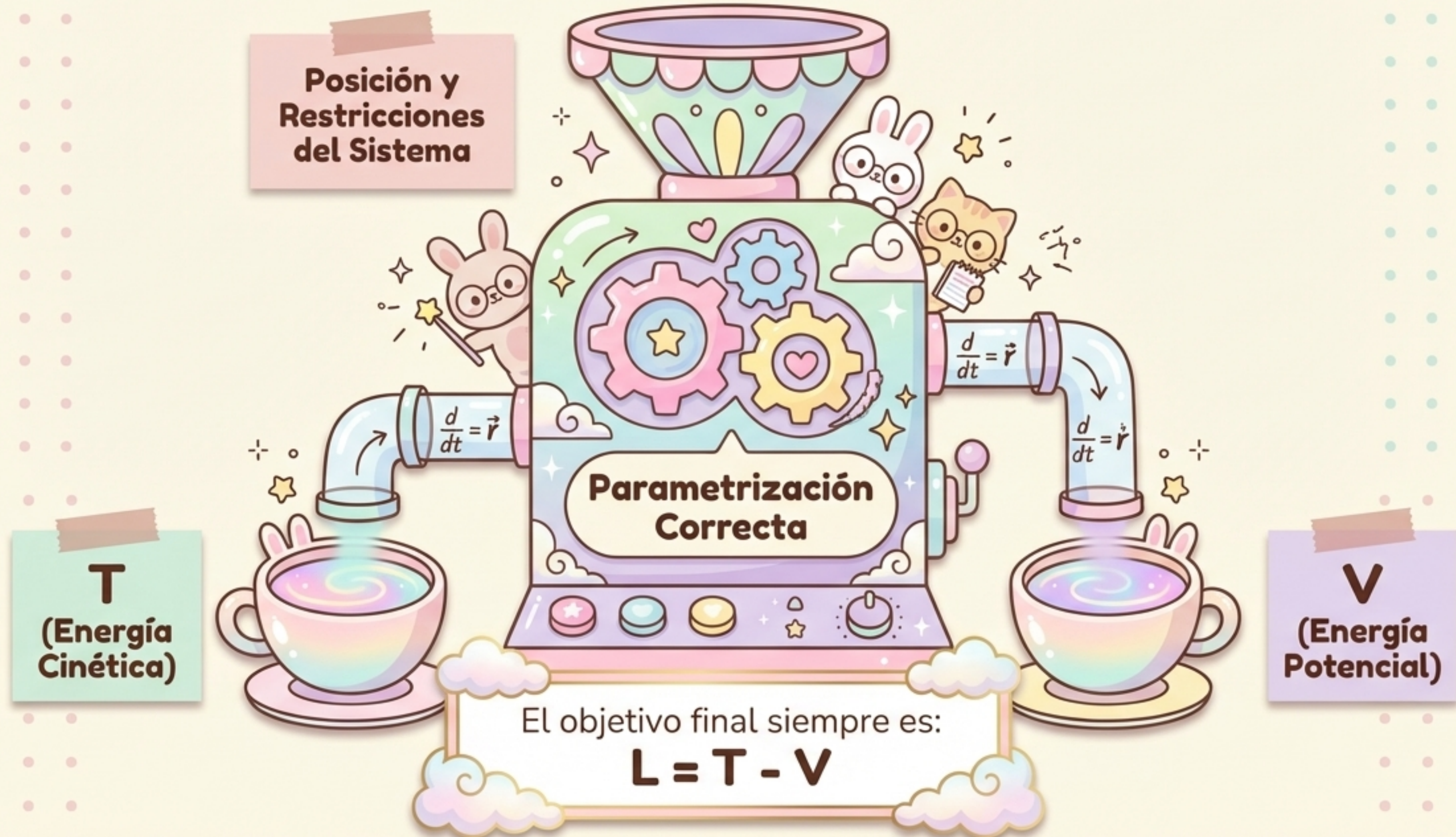
Ahora respondemos a:
¿Dónde está la partícula en
este instante?

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Soy x, y
dependo
de t ✨

Soy y, ¡yo
también!
🌸

¿Por qué lo necesitamos para armar el Lagrangiano?



La magia de las restricciones: ¡Menos variables!

En la vida real, los sistemas no se mueven por donde quieren. Están obligados a moverse sobre curvas o superficies.

Antes (Estresante)



! x y no son independientes. !

$$x^2 + y^2 = R^2$$

¡Demasiadas variables!

Después (Relajante)



$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

! ! ¡La restricción se cumple sola! !
Pasaste de dos variables a UNA.

¡Solo una variable!
¡Yupi!

Conoce a las Coordenadas Generalizadas (q_i)

Son tus nuevas variables elegidas a medida para describir el sistema de la forma más sencilla. Tú eliges quién es q .



Entonces parametrizar muchas veces es elegir bien el q .

La Receta Maestra: Preparando los Ingredientes

Paso 1: Mira la geometría



¿el objeto se mueve en línea recta?



¿sobre un círculo?

¿sobre una superficie?



¿hay una cuerda fija?

¿hay una barra rígida?

Paso 2: Identifica la restricción

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ejemplo circular!

Paso 3: Elige un parámetro cómodo

Decide tu variable



usa θ



usa x o s

La Receta Maestra: ¡A Cocinar Derivadas!

Paso 4: Escribe x, y, z en función del parámetro

Ejemplo:

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta \\y &= -l \cos \theta\end{aligned}$$

✦ Paso 5: Deriva para obtener velocidades ✦

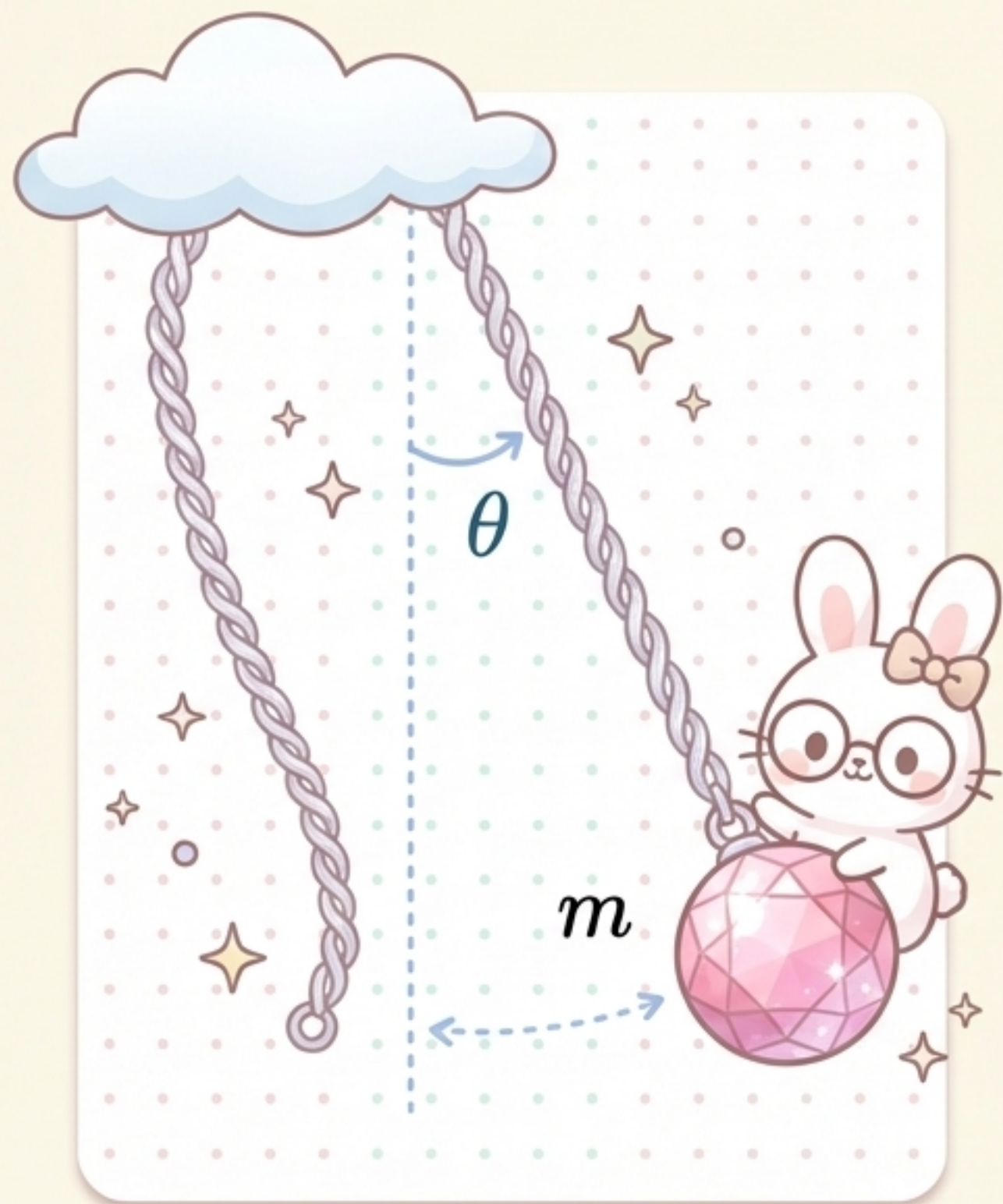
$$\begin{aligned}\dot{x} &= l \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} &= l \sin \theta \dot{\theta}\end{aligned}$$

Paso 6: Construye la Energía Cinética (T)

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

¡Reemplaza tus derivadas aquí y simplifica!

Clásicos de la Casa: El Péndulo Simple



Posición:

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta \\y &= -l \cos \theta\end{aligned}$$

Velocidad:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} &= l \sin \theta \dot{\theta}\end{aligned}$$

Energía (T):

$$T = \frac{1}{2} m (l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2)$$

$$(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

¡Esto vale 1!

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Clásicos de la Casa: Partícula en un Aro

Una partícula obligada a moverse sobre un aro vertical de radio R .



Nota cómo la estructura es idéntica al péndulo, solo cambia ℓ por R . ¡La buena parametrización hace que la física sea predecible!

Parametrización:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \theta \\y &= R \sin \theta\end{aligned}$$

Velocidades:

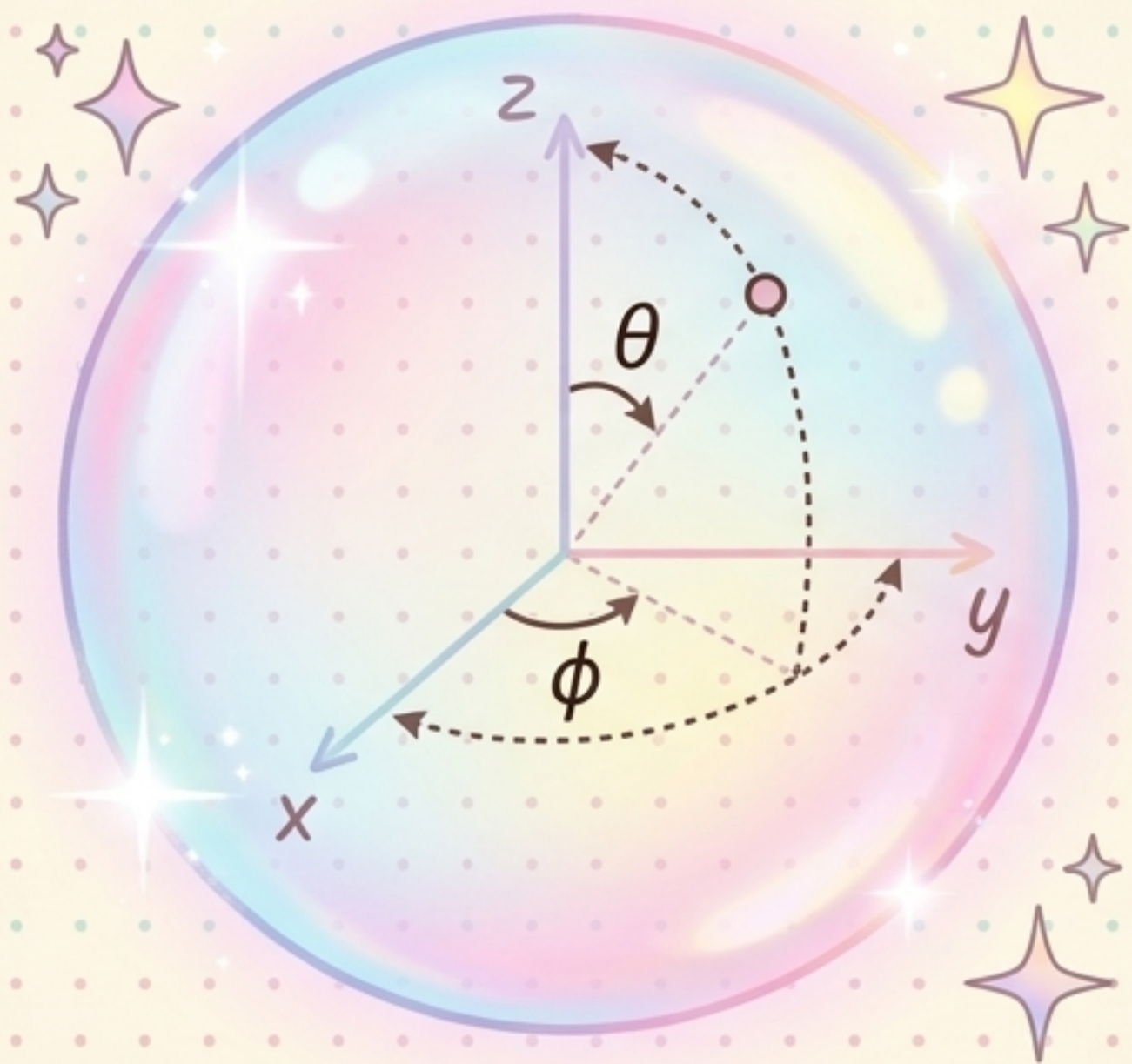
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -R \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} &= R \cos \theta \dot{\theta}\end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$



¿Y si el sistema está en 3D?

No entres en pánico. Si la partícula vive en la superficie de una esfera, usamos dos ángulos en lugar de uno.



Esfera de radio R

$$x = R \sin \phi \cos \theta$$

$$y = R \sin \phi \sin \theta$$

$$z = R \cos \phi$$

Pro-Tip

Aquí tus coordenadas generalizadas q_i serán dos: θ y ϕ . La restricción $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ya viene incluida gratis.

Control de Calidad: ¿Tu parametrización es buena?

El Camino Kawaii / Bueno

Cumple la restricción automáticamente

Usa la menor cantidad de variables posibles.

Ejemplo Bueno: Circunferencia

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta$$

¡Hermoso y fácil de derivar!

El Camino Feo / Malo

Dejar x e y separadas cuando el movimiento ya está obligado a una curva.

Se puede hacer, pero el Lagrangiano te quedará gigante y difícil de resolver.
¡Evítalo!

Guía de Supervivencia: Tipos de preguntas en controles

Tipo A

Parametrice la trayectoria

Solo te piden entregar las ecuaciones $x(q)$ e $y(q)$.

Tipo C

Obtenga la energía cinética

1. Parametriza
2. Deriva en el tiempo
3. Reemplaza en T

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Tipo B

Use una coordenada generalizada

Elige q (ej. θ) y escribe x, y en función de ella.

Tipo D (El Jefe Final)

Construya el Lagrangiano

Haz todo lo anterior, obtén T y V , y finaliza escribiendo con orgullo $\mathcal{L} = T - V$.

$$\mathcal{L} = T - V$$

Menú para llevar (El Machete Definitivo)

✦ Situación	Tu Orden (Parametrización Útil)
Recta	$x = t, y = mt + n$
Parábola	$x = t, y = t^2$
Circunferencia	$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$
✦ Péndulo	$x = \ell \sin \theta, y = -\ell \cos \theta$
Polar general	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$
Esfera	$x = R \sin \phi \cos \theta, y = R \sin \phi \sin \theta, z = R \cos \phi$

¡Tómale captura de pantalla para el examen!



! Peligro Común: ¡No olvides la Regla de la Cadena!

En física, derivamos respecto al tiempo (t), no respecto a la coordenada. Si tu ángulo θ cambia en el tiempo, siempre aparece un $\dot{\theta}$.

Good vs Bad

Derivada simple
(Cálculo 1):

$$\frac{d}{d\theta} (\sin \theta) = \cos \theta$$

Derivada temporal
(Lagrangiano):

$$\frac{d}{dt} (\sin \theta) = \cos \theta * \dot{\theta}$$

¡Este puntito
arruina
exámenes si
lo olvidas!

¡Estás list@ para armar cualquier Lagrangiano! 🌸



Parametrizar no es un truco oscuro, es simplemente elegir el mejor punto de vista para describir el movimiento.

- ✧ Identifica la restricción geométrica.
- ✧ Elige la coordenada generalizada más floja.
- ✧ Deja que el cálculo haga el trabajo pesado por ti.

¡Mucho éxito en tu próximo control de mecánica!